ELEME TEKNİKLERİ

1. **Değişkenler Üzerinde Kısıtlama Olmadığında Arama**

b) Artmalı Adım Araması:

Sabit adımlı arama, çok basit olmasına karşın, optimumun bulunduğu bölgenin kısıtlı olmaması nedeniyle bir takım hesaplama güçlükleri doğurabilir. Örneğin optimuma çok uzak bir x_1 noktası seçildiğinde s adım büyüklüğü de küçük alındığında optimumu bulmak için çok sayıda hesaplama yapmak zorunda kalabiliriz. Bu durumda adım büyüklüğünü artırarak arama yapıldığında arzulanan çözüme daha az işlemle ulaşmak mümkündür. Örneğin adım büyüklüğü sabit bir değer yerine her defasında 2 ile çarpılarak arama yapılabilir.

ÖRNEK:

$\mathrm{x}_1 = 0.5$ başlangıç noktası ve $s = 0.01$ adım büyüklüğü olmak üzere $f(x) = x(x-5)$ fonksiyonunun minimum noktasını artmalı adım araması ile bulalım.

$\mathrm{f}_1 = -2.25$, $\mathrm{f}_2 = -2.2889$ olup $\mathrm{f}_2 < \mathrm{f}_1$ ve fonksiyon tek modlu olduğundan minimum nokta x_1'in pozitif yönünde olacaktır. Sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

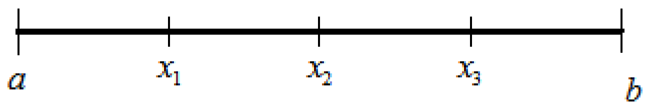
i	s	$x_i = x_1 + (i-1)s$	f_i	$f_i < f_{i-1}$
1	----	0.5	-2.25	-----
2	0.01	0.5+0.01	-.2889	E
3	0.02	0.5+0.02	-2.32	E
4	0.04	0.5+0.04	-2.40	E
5	0.08	0.5+0.08	-2.56	E
6	0.16	0.5+0.16	-2.86	E
7	0.32	0.5+0.32	-3.42	E
8	0.64	0.5+0.64	-4.40	E
9	1.28	0.5+1.28	-5.73	E
10	2.56	0.5+2.56	-5.93	E
11	5.12	0.5+5.12	3.48	H

11.adımda f değerinde artma görüldüğünden arama durdurulur. $x_{10} = 3.06$ minimum nokta olarak alınır. Gerçek minimum nokta olan 2.5 ‘tan farklı bir nokta elde edilmiştir. Bu aramada adım büyüklüğü küçük alınmazsa optimum nokta bazı durumlarda aşılabilir. Yaklaşık optimum noktayı vermesine karşılık optimumun bulunduğu aralık ile ilgili bilgi verir.

2. Değişkenler Üzerinde Kısıtlama Olduğunda Arama

a) Dörde Bölerek Arama

$f(x)$ minimumu araştırılan fonksiyon ve $a \leq x \leq b$ olsun. Tanım aralığı aşağıdaki şekildeki 4 eşit parçaya bölünür.



$x_1 = a + \frac{b-a}{4}$, $x_2 = x_1 + \frac{b-a}{4}$, $x_3 = x_2 + \frac{b-a}{4}$ noktaları bulunur. Bu noktalardaki $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ değerleri hesaplanır.

i. $f(x_1)$ en küçük ise yeni belirsizlik aralığı $(a\,, x_2)$ olur.

ii. $f(x_2)$ en küçük ise yeni belirsizlik aralığı $(x_1\,, x_3)$ olur.

iii. $f(x_3)$ en küçük ise yeni belirsizlik aralığı $(\,x_2\,, b)$ olur.

Belirsizlik aralıkları, fonksiyon değerini en azaltan noktayı içerecek şekilde belirlenmektedir. Maksimum problemlerinde ise belirsizlik aralığı fonksiyon değerini en fazla artıran noktayı içerecek şekilde belirlenir.

Her defasında belirsizlik aralığı 4 eşit parçaya bölünür ve yeni belirsizlik aralığı bulunarak belirsizlik aralığı yeterince küçültüldüğünde durulur. Son belirsizlik aralığının yarısı minimum nokta olarak alınabilir.

n adım sonundaki belirsizlik aralığının uzunluğu; $L_n = \frac{b-a}{2^n}$ olacaktır. Son belirsizlik aralığının uzunluğu verildiğinde, kaç adımda araştırma yapılacağı da buradan belirlenebilir.

ÖRNEK:

$f(x) = 5x - e^x$, $x \in [0, 2]$ fonksiyonunun maksimumunu $L_n = 0.25$ alıp, dörde bölerek arama yöntemiyle bulalım.

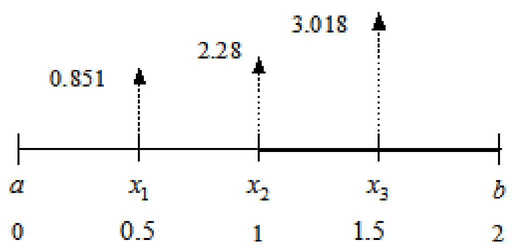
$\frac{2-0}{2^n} = 0.25$ ise araştırma sayısı $n = 3$ olarak elde edilir.

$x_1 = 0 + \frac{2-0}{4} = 0.5$, $f(x_1) = 0.851$

$x_2 = 0.5 + \frac{2-0}{4} = 1$, $f(x_2) = 2.28$

$x_3 = 1 + \frac{2-0}{4} = 1.5$, $f(x_3) = 3.018$

Yeni belirsizlik aralığı, $f(x_3)$ en büyük olduğundan [1,2] olarak alınacaktır. Çünkü bu üç noktadan fonksiyonu en fazla artıran nokta [1,2] aralığındadır. Bu işlemi yine basit bir şekil ile görebiliriz.



[1,2] belirsizlik aralığı üzerinden ikinci araştırmayı yapalım.

$x_1 = 1 + \frac{2-1}{4} = 1.25$, $f(x_1) = 2.7596$

$x_2 = 1.25 + \frac{2-1}{4} = 1.5$, $f(x_2) = 3.0183$

$x_3 = 1.5 + \frac{2-1}{4} = 1.75$, $f(x_3) = 2.995$

$f(x_2)$ en büyük olduğu için x_2 noktasını içeren [1.25, 1.75] aralığı yeni belirsizlik aralığı olur. Bu aralık üzerinden son araştırma yapılırsa;

$x_1 = 1.25 + \frac{1.75-1.25}{4} = 1.375$, $f(x_1) = 2.9199$

$x_2 = 1.375 + \frac{1.75-1.25}{4} = 1.5$, $f(x_2) = 3.0183$

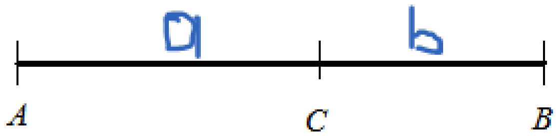
$x_3 = 1.5 + \frac{1.75-1.25}{4} = 1.625$, $f(x_3) = 3.046$

$f(x_3)$ en büyük olduğu için x_3 noktasını içeren [1.5, 1.75] aralığı son belirsizlik aralığı olur.

Bu aralığın orta noktası olan $x^* = 1.625$ noktası optimum nokta olarak alınabilir.

b) Altın Oranı Araması

Bir AB doğru parçasını bir C noktası ile aşağıdaki gibi iki parçaya bölelim.



AC ve CB uzunluklarına sırasıyla a ve b diyelim.

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ olacak şekilde yapılan bölünmeye kutsal oran ya da altın oranı adı verilir. Bu oranı; $(a+b)b = a^2$, $ab + b^2 - a^2 = 0$ olarak yazabiliriz.

a için kökler bulunursa, pozitif kök: $a = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2}$ olarak elde edilir.

Buradan da

$$\tau = \frac{a}{b} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.618033988$$

sayısı elde edilir ve bu sayı altın oranı olarak kullanılır.

Klasik ve modern mimaride, bina tasarımlarında, güzel sanatlarda sıkça altın oranı kriteri kullanılır. Optimizasyonda ise belirsizlik aralığının her iki ucundan altın oranı uzaklıkta noktalar x_1 , x_2 seçilip bu noktadaki fonksiyon değerleri dikkate alınarak aralık küçültülür ve yeni belirsizlik aralığı bulunur. Bu işlem istenilen duyarlılıktaki son belirsizlik aralığına kadar devam ettirilir.

Başlangıç aralığı $L_0 = L_1$ olsun. İkinci araştırmada bu aralık $L_2 = \frac{1}{\tau}(b-a)$ uzunluğunda olur.

n araştırma yapıldığında bu uzunluk $L_n = \frac{1}{\tau^n}(b-a)$ olacaktır. Bu yüzden son belirsizlik aralığının belli bir ε (küçük pozitif bir sayı) değerinden az olması isteniyorsa, $\frac{1}{\tau}(b-a) < \varepsilon$ yardımıyla araştırma sayısı önceden belirlenebilir.

Altın oranı araması tek modlu kısıtsız bir minimum problemi için aşağıdaki adımlar izlenerek yapılır:

Değişkenin tanım aralığı (a, b) olmak üzere,

$x_1 = a + \frac{b-a}{\tau^2}$ ve $x_2 = b - (x_1 - a)$ noktaları için $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerleri bulunur.

i) $f(x_1) < f(x_2)$ ise belirsizlik aralığı $(a\,,\ x_2)$ alınarak,

ii) $f(x_1) > f(x_2)$ ise belirsizlik aralığı $(x_1\,,\ b)$ alınarak,

iii) $f(x_1) = f(x_2)$ ise $(x_1\,, x_2)$ gibi herhangi iki nokta alınarak,

altın oranı araması işlemleri tekrarlanır. Problem bir maksimum problemi ise i) ve ii) de verilen belirsizlik aralıkları maksimumu veren noktayı içerecek şekilde yeniden düzenlenmelidir.

ÖRNEK:

$f(x) = x^2 + 1 \quad , -1 \leq x \leq 0.75$ fonksiyonunun minimumunu son belirsizlik aralığı 0.15 ten az olacak şekilde bulunuz.

Son belirsizlik aralığının uzunluğu $L_n = \frac{1}{\tau^n}(b-a)$ olarak verilmişti. Buradan

$$\frac{(0.75-(-1))}{(1.6180339)^n} < 0.15$$

$$(1.6180339)^n > 11.6667$$

$$n\, ln(1.6180339) > \ln(11.6667)$$

$$n(0.4812) > 2.45673$$

ve sonuç olarak $n > 5.11$ elde edilir. Öyleyse istenilen duyarlılıktaki minimum noktayı bulmak için en az 6 araştırma yapılmalıdır.

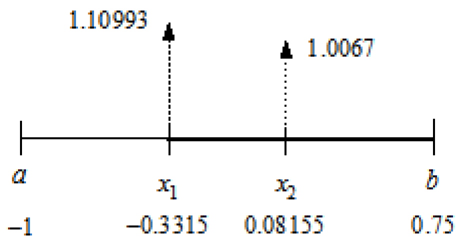
$x_1 = a + \frac{b-a}{\tau^2}$ olduğundan, $x_1 = -1 + \frac{(0.75-(-1))}{(1.6180339)^2} = -0.3315594$

$x_2 = b - (x_1 - a)$ olduğundan, $x_2 = 0.75 - \left(-0.3315594 - (-1)\right) = 0.0815594$

olup

$f(x_1) = 1.10993$ ve $f(x_2) = 1.006$ bulunur.

$f(x_2) < f(x_1)$ olduğundan yeni belirsizlik aralığı $(x_1, b) = (-0.3316\ ,\ 0.75)$ olur. Yeni aralığın seçimini basit bir şekille de görebiliriz.



Şekilden de görüldüğü gibi fonksiyon değeri daha küçük olan noktayı içeren $(-0.3316\ ,\ 0.75)$ aralığı yeni belirsizlik aralığı olarak alınmıştır. Fonksiyon değerini daha büyük yapan noktanın bulunduğu aralık işlem dışı tutularak belirsizlik aralığı küçültülmüştür.

Yeni belirsizlik aralığı içindeki x_1 ve x_2 noktaları ile bunların fonksiyon değerleri

$$x_1 = -0.3316 + \frac{(0.75-(-0.3316))}{(1.6180339)^2} = 0.0816$$

$$x_2 = 0.75 - \left(0.0816 - (-0.3316)\right) = 0.3368$$

$f(x_1) = 1.0067$ ve $f(x_2) = 1.1134$ bulunur.

$f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan yeni belirsizlik aralığı $(-0.3316\ ,\ 0.3368)$ olur. Burada da yine fonksiyon değerini daha azaltan aralık, belirsizlik aralığı olarak belirlenmiştir.

Yukarıdaki şekilde işlemler sürdürüldüğünde elde edilecek sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

n	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-1	0.75	-0.3316	0.0816	1.1099	1.0067*
2	-0.3316	0.75	0.0816	0.3368	1.0067*	1.1134
3	-0.3316	0.3368	-0.0762	0.0816	1.0058*	1.0067
4	-0.3316	0.0816	-0.1737	-0.0712	1.0302	1.0058*
5	-0.1737	0.0816	-0.0762	-0.016	1.0058	1.0003*
6	-0.0762	0.0816	-0.016	0.0214	1.0002	1.0004

Son belirsizlik aralığının orta noktası olan $x^* = \frac{-0.0762+0.0816}{2} = 0.0027$ değeri minimum nokta olarak kabul edilebilir.